

Proposta de Trabalho de Conclusão de Curso

Aluno: Théo Borém Fabris
Orientador: Prof. Yoshiharu Kohayakawa

30 de abril de 2023

1 Introdução

Encontrar um caminho que conecta dois vértices de um grafo é uma tarefa essencial para resolver problemas de diversas áreas do conhecimento. Graças a sua formulação simples, este problema foi estudado sob diversas perspectivas computacionais visando entender qual a quantidade de recursos (por exemplo, consumo de espaço [10], quantidade de informação trocada em modelos de computação distribuída [4], quantidade de bits pseudoaleatórios utilizados [2], etc.) que são necessários para resolvê-lo. Um problema também relacionado à conexidade de grafos é a construção explícita de famílias de grafos esparsos (o número de arestas é linear com o número de vértices) em que, para cada grafo da família, a distância entre quaisquer dois vértices do grafo (comprimento de um menor caminho entre os dois vértices) é pequena em relação ao número de vértices do grafo. Grafos com esta propriedade podem ser utilizados para projetar redes de comunicação em que a quantidade de linhas de transmissão (arestas) é linear com o número de usuários da rede (vértices) e uma mensagem não precisará passar por muitas linhas distintas para chegar no seu destino final (uma vez que a distância entre vértices é pequena). No contexto de teoria espectral dos grafos, sabe-se que grafos regulares com espectro (autovalores da matriz de adjacência do grafo) com propriedades específicas têm diâmetro (a maior distância entre dois vértices) logarítmico com o número de vértices e construções explícitas de famílias de grafos deste tipo já foram propostas por diversos autores [7, 6, 9]. Assim, estas construções podem ser utilizadas para resolver diversos problemas [5] que estão relacionados à conexidade de grafos, por exemplo questões sobre a complexidade computacional para encontrar um caminho entre dois vértices de um grafo.

2 Objetivos

O objetivo do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do aluno Théo Borém Fabris é estudar o problema de conexidade de grafos em modelos computacionais diversos. Devido à amplitude deste assunto (veja o artigo de Wigderson [11] para uma exposição detalhada), planeja-se abordar algoritmos aleatorizados e determinísticos com consumo de espaço logarítmico em relação ao tamanho do grafo. Em especial, será estudado o algoritmo aleatorizado proposto por Aleliunas, Karp, Lipton, Lovász e Rackoff [1] e o algoritmo determinístico proposto por Reingold [8]. O algoritmo aleatorizado [1] utiliza passeios aleatórios para resolver o problema e analisa diversas propriedades de passeios aleatórios em grafos. Já o algoritmo determinístico [8] utiliza ideias oriundas do produto zig-zag (introduzido por Reingold, Vadhan e Wigderson [9]) e propriedades espectrais de grafos expansores.

Também objetiva-se apresentar os resultados conhecidos de forma auto-contida (sempre que possível) na monografia, além de padronizar a notação utilizada pelas referências consultadas.

3 Metodologia

Para atingir os objetivos propostos, planeja-se ler os artigos [1] e [8]. Planeja-se utilizar as seguintes referências como pré-requisitos para estes artigos:

- o Capítulo 9 de Bollobás [3] para o estudo de passeios aleatórios em grafos;
- partes da survey de Hoory, Linial e Wigderson [5] para o estudo das propriedades de grafos expansores (em particular, as propriedades espectrais destes grafos) relevantes para este trabalho;
- o artigo de Reingold, Vadhan, Wigderson [9] para o estudo do produto zig-zag entre grafos.

4 Cronograma

Planeja-se o seguinte cronograma de atividades:

- Abril: Organização das atividades do TCC.
- Maio: Inicia a leitura de Reingold, Vadhan, e Wigderson [9], das seções necessárias de Hoory, Linial, e Wigderson [5], e do capítulo 9 de Bollobás [3].
- Junho: Continua a leitura do artigo [9], da survey [5] e do livro [3]; Inicia a escrita do capítulo de pré-requisitos da monografia.
- Julho: Finaliza a leitura do artigo [9], da survey [5] e do livro [3]; Finaliza a versão preliminar do capítulo de pré-requisitos da monografia.
- Agosto: Inicia a leitura de Reingold [8], de Aleliunas, Karp, Lipton, Lovász, e Rackoff [1], e de eventuais materiais de apoio; Começa a elaboração dos capítulos da monografia sobre estes artigos.
- Setembro: Continua a leitura do artigo [8], do artigo [1], e de eventuais materiais de apoio; Continua a elaboração dos capítulos da monografia sobre estes artigos.
- Outubro: Finaliza a leitura do artigo [8] e do artigo [1]; Finaliza a elaboração dos capítulos da monografia sobre estes artigos.
- Novembro: Termina a elaboração dos capítulos de introdução, desenvolvimento e conclusão da monografia; Inicia e termina o processo de revisão da monografia.
- Dezembro: Realiza a apresentação oral do TCC.

Referências

- [1] R. Aleliunas, R. J. Lipton, L. Lovász, C. Rackoff, and R. M. Karp, *Random walks, universal traversal sequences, and the complexity of maze problems*, 2013 IEEE 54th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Los Alamitos, CA, USA), IEEE Computer Society, oct 1979, pp. 218–223.
- [2] László Babai, Noam Nisan, and Mario Szegedy, *Multiparty protocols, pseudorandom generators for Logspace, and time- space trade-offs*, J. Comput. Syst. Sci. **45** (1992), no. 2, 204–232 (English).
- [3] Béla Bollobás, *Modern graph theory*, Grad. Texts Math., vol. 184, New York, NY: Springer, 1998 (English).

- [4] András Hajnal, Wolfgang Maass, and György Turán, *On the communication complexity of graph properties*, Proceedings of the Twentieth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (New York, NY, USA), STOC '88, Association for Computing Machinery, 1988, pp. 186–191.
- [5] Shlomo Hoory, Nathan Linial, and Avi Wigderson, *Expander graphs and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **43** (2006), no. 4, 439–561. MR 2247919
- [6] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak, *Ramanujan graphs*, Combinatorica **8** (1988), no. 3, 261–277 (English).
- [7] G. A. Margulis, *Explicit construction of a concentrator*, Probl. Peredachi Inf. **9** (1973), no. 4, 71–80 (Russian).
- [8] Omer Reingold, *Undirected connectivity in log-space*, J. ACM **55** (2008), no. 4, Art. 17, 24. MR 2445014
- [9] Omer Reingold, Salil Vadhan, and Avi Wigderson, *Entropy waves, the zig-zag graph product, and new constant-degree expanders*, Ann. of Math. (2) **155** (2002), no. 1, 157–187. MR 1888797
- [10] W. J. Savitch, *Relationships between nondeterministic and deterministic tape complexities*, J. Comput. Syst. Sci. **4** (1970), 177–192 (English).
- [11] Avi Wigderson, *The complexity of graph connectivity*, Mathematical foundations of computer science 1992. 17th international symposium, Prague, Czechoslovakia, August 24–28, 1992. Proceedings, Berlin: Springer, 1992, pp. 112–132 (English).