Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Bacharelado em Ciência da Computação

Usando aleatoriedade para lidar com problemas computacionalmente difíceis em grafos

Guilherme Vinicius Ferreira de Assis
Orientador: Fábio Happ Botler

Proposta de projeto
MAC0499 - Trabalho de Formatura Supervisionado

São Paulo
2025

1 Introdução

Ao lidarmos com problemas computacionalmente difíceis – aqueles para os quais não se conhecem algoritmos polinomiais –, duas estratégias são comumente adotadas: o desenvolvimento de algoritmos eficientes para subclasses específicas do problema ou a adoção de soluções aproximadas (mediante algoritmos de aproximação), quando cabível [1]. Entretanto, em diversos casos, a dificuldade observada do problema é artificialmente elevada por um conjunto pequeno de instâncias patológicas, estatisticamente irrelevantes na prática. Isso significa que, em termos gerais, o problema pode ser resolvido em tempo polinomial, exceto por essas excepcionais instâncias difíceis. Nesse contexto, uma abordagem não convencional torna-se particularmente interessante: a introdução de aleatoriedade na análise do problema, permitindo-nos examinar seu comportamento médio, o que resulta em conclusões significativamente mais otimistas que a análise de pior caso [2]. Aqui, algoritmos probabilísticos (que empregam aleatoriedade em sua execução) ou algoritmos determinísticos projetados para entradas aleatórias podem oferecer soluções eficientes, seja garantindo um tempo de execução *esperado* polinomial, seja com garantia de alta probabilidade de sucesso [2, 3].

Neste trabalho, estamos interessados em problemas relacionados a grafos. Para ilustrar os conceitos mencionados, examinemos brevemente o problema do ciclo hamiltoniano. Este problema – reconhecidamente NP-difícil [1] – consiste em determinar se um grafo admite um ciclo hamiltoniano, ou seja, um ciclo que visite cada vértice exatamente uma vez. Resultados básicos sobre grafos aleatórios [4] demonstram que, por exemplo, ao selecionarmos uniformemente ao acaso um grafo G dentre todos os grafos possíveis com n vértices, com alta probabilidade[1] G conterá um ciclo hamiltoniano. Tais resultados existenciais motivam o desenvolvimento de algoritmos que assumem grafos aleatórios como entrada, operando com alta probabilidade de sucesso. De fato, existem algoritmos polinomiais para o problema do ciclo hamiltoniano em grafos aleatórios cuja probabilidade de falha é tão pequena que, nos raros casos de fracasso, pode-se recorrer a técnicas de programação dinâmica (mesmo com uma complexidade exponencial no pior caso), obtendo assim um algoritmo híbrido que trata todas as instâncias com tempo esperado polinomial [3, 5].

O presente trabalho visa compreender tais comportamentos em problemas de grafos, com o objetivo de produzir um material introdutório sobre abordagens probabilísticas e análises de caso médio como estratégias para enfrentar desafios computacionais complexos.

2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal compreender e sistematizar as ferramentas probabilísticas aplicáveis ao desenvolvimento de algoritmos para problemas difíceis em grafos, produzindo um material introdutório com abordagem didática sobre o tema. O conteúdo servirá como um marco zero para interessados na área, consolidando os fundamentos necessários para estudos futuros.

Para atingir esse objetivo, é necessária a construção de uma base teórica sólida a

[1] Uma sequência de eventos $\mathcal{E}_n$ ocorre com *alta probabilidade* se $\Pr(\mathcal{E}_n) \to 1$ quando $n \to \infty$

respeito de probabilidade e grafos aleatórios, além da revisão dos fundamentos de complexidade computacional. Além disso, o conhecimento científico existente a respeito das abordagens probabilísticas citadas deverá ser organizado visando sistematizar os processos de modelagem, análise e desenvolvimento desses algoritmos.

3 Metodologia

Tratando-se de um trabalho essencialmente teórico e de revisão, a metodologia adotada consiste na revisão bibliográfica abrangente, envolvendo o estudo de materiais acadêmicos pertinentes aos temas sugeridos, bem como a posterior síntese do conhecimento adquirido e produção cuidadosa do material introdutório proposto.

4 Cronograma

A seguir apresentamos o cronograma de tópicos a serem estudados.

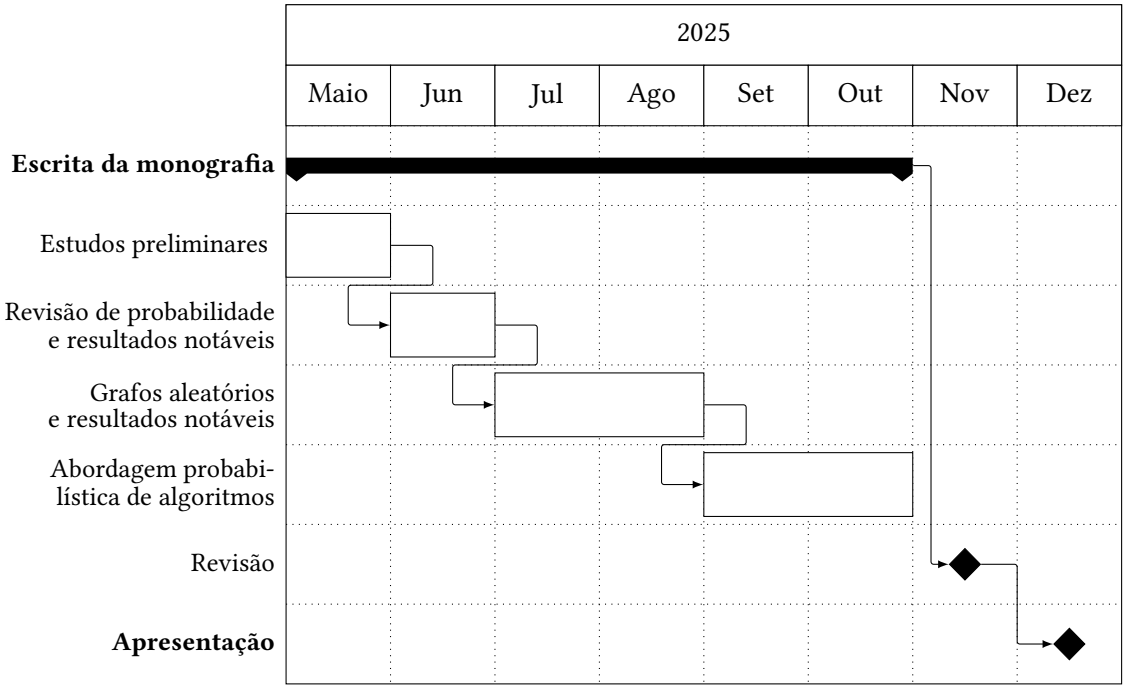

Figura 1: Cronograma do projeto.

Os estudos preliminares tratam-se de uma revisão sobre teoria dos grafos, problemas clássicos e complexidade de algoritmos. Em seguida, propõe-se a revisão a respeito de tópicos fundamentais de probabilidade e estatística, além de resultados essenciais para o desenvolvimento do trabalho, como o método probabilístico e o lema local de Lovász. A terceira etapa envolve o estudo de modelos de grafos aleatórios e suas propriedades, as quais nos ajudam a construir algoritmos probabilísticos. Por fim, os estudos encerram-se com a revisão bibliográfica a respeito de algoritmos aleatórios, algoritmos com alta probabilidade de sucesso e algoritmos com tempo esperado de execução polinomial. A

monografia será escrita paralelamente aos estudos anteriores, e o trabalho conclui-se com a revisão final e apresentação.

Referências

[1] CORMEN, T. H. et al. *Introduction to Algorithms, Third Edition*. 3rd. ed. [S.l.]: The MIT Press, 2009. ISBN 0262033844.

[2] MITZENMACHER, M.; UPFAL, E. *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.

[3] FRIEZE, A.; MCDIARMID, C. Algorithmic theory of random graphs. *Random Structures & Algorithms*, v. 10, n. 1-2, p. 5–42, 1997.

[4] BOLLOBáS, B. *Random Graphs*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics).

[5] FRIEZE, A. Hamilton cycles in random graphs: a bibliography. 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1901.07139>.