Conjectura big-line-big-clique e bloqueadores de visibilidade

Gabriel Kuribara Lasso
Orientador: Carlos Eduardo Ferreira

IME-USP

Novembro de 2018

Introdução

- Visibilidade de pontos no plano
- Teoria de Ramsey

Introdução

- Visibilidade de pontos no plano
- Teoria de Ramsey

Para $k, l > 2$ inteiros, existe um $n = n(k, l)$ tal que todo conjunto de pelo menos n pontos no plano contém k pontos visíveis dois a dois ou l pontos colineares?

Grafos

Um grafo é um par $G = (V, E)$

Grafos

Um grafo é um par $G = (V, E)$, em que:

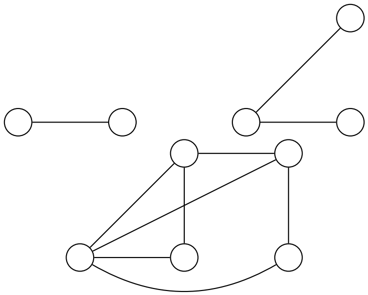
- V é um conjunto de vértices;
- E é um conjunto de arestas (pares não ordenados de vértices).

Grafos

Um grafo é um par $G = (V, E)$, em que:

- V é um conjunto de vértices;
- E é um conjunto de arestas (pares não ordenados de vértices).

Exemplos

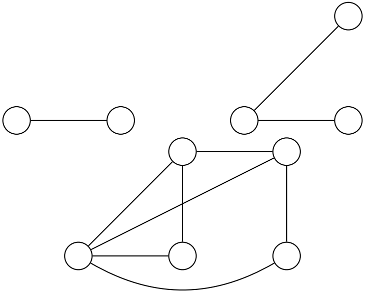


Grafos

Um grafo é um par $G = (V, E)$, em que:

- V é um conjunto de vértices;
- E é um conjunto de arestas (pares não ordenados de vértices).

Exemplos



Definição

Uma k-clique de um grafo é um conjunto de k vértices com aresta entre todos eles.

Grafos de visibilidade

Dado um conjunto de pontos no plano P

Grafos de visibilidade

Dado um conjunto de pontos no plano P

$\mathcal{V}(P) = G$, tal que:

Grafos de visibilidade

Dado um conjunto de pontos no plano P
$\mathcal{V}(P) = G$, tal que:

- $V(G) = P$;
- Aresta entre dois vértices p e q se não há outro ponto de P no segmento $\overline{pq}$.

Grafos de visibilidade

Dado um conjunto de pontos no plano P
$\mathcal{V}(P) = G$, tal que:

- $V(G) = P$;
- Aresta entre dois vértices p e q se não há outro ponto de P no segmento $\overline{pq}$.

Definição

Um grafo de visibilidade é plano se suas arestas não se cruzam (considerando o desenho dado por P).

Grafos de visibilidade

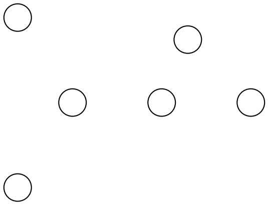
Dado um conjunto de pontos no plano P
$\mathcal{V}(P) = G$, tal que:

- $V(G) = P$;
- Aresta entre dois vértices p e q se não há outro ponto de P no segmento $\overline{pq}$.

Definição

Um grafo de visibilidade é plano se suas arestas não se cruzam (considerando o desenho dado por P).

Exemplo



Grafos de visibilidade

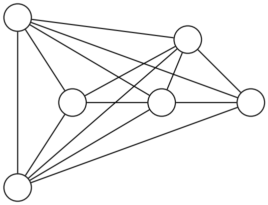
Dado um conjunto de pontos no plano P
$\mathcal{V}(P) = G$, tal que:

- $V(G) = P$;
- Aresta entre dois vértices p e q se não há outro ponto de P no segmento $\overline{pq}$.

Definição

Um grafo de visibilidade é plano se suas arestas não se cruzam (considerando o desenho dado por P).

Exemplo



Big-line-big-clique

Reformulando o problema original...

Conjectura (*Kára et al. (2005)*)

Dados inteiros $k, l > 2$, existe um $n = n(k, l)$ tal que, para todo conjunto finito P com pelo menos n pontos, $\mathcal{V}(P)$ possui uma k-clique ou P possui l pontos colineares

Big-line-big-clique

Caso $K = 4$

Lema (*Horton (2003)*)

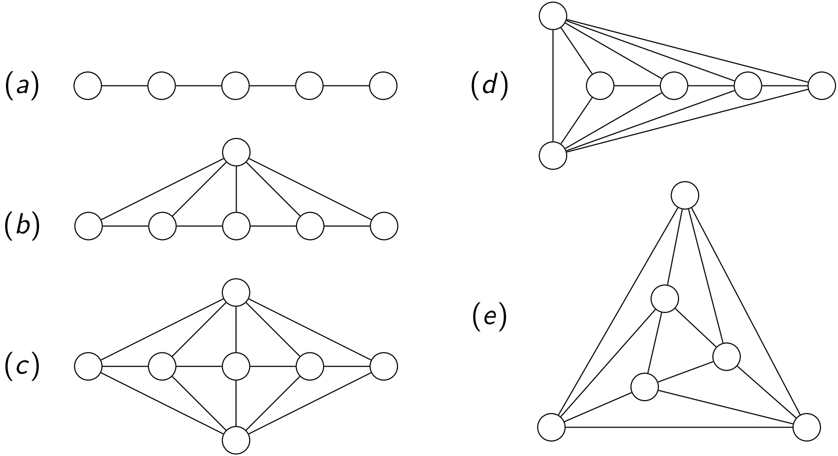
Seja G um grafo de visibilidade. G é plano ou G contém uma 4-clique.

Big-line-big-clique

Caso $K = 4$

Teorema (*Dujmovic et al. (2008)*)

Caracterização de grafos de visibilidade planos:
Seja P um conjunto finito de pontos no plano. Então $\mathcal{V}(P)$ é plano se e somente se é de algum dos jeitos abaixo:



Big-line-big-clique

Caso $K = 4$

Corolário

Seja P um conjunto finito de pontos no plano.
São equivalentes as seguintes afirmações:

- $\mathcal{V}(P)$ satisfaz (a), (b), (c) ou (e) do teorema anterior;
- $\mathcal{V}(P)$ não tem 4-cliques.

Portanto, a conjectura vale com $k = 4$ e $n(k, l) = max\{7, n + 2\}$

Resultados

Além do resultado visto aqui, o estudo mostrou resultados de *Abel et al. (2009)* para $k = 5$ e mostrou que para conjuntos infinitos de pontos a conjectura não vale (*Pór e Wood (2010)*).
Os valores conhecidos de $n(k, l)$ seguem na tabela:

$k \setminus l$	3	4	5	6	7	...
3	3	4	5	6	7	l
4	4	7	7	8	9	$l + 2$
5	5	≤ 5248	≤ 8200	≤ 11808	≤ 16072	$\leq 328l^2$
6	6	?	?	?	?	?

Conclusão

Embora o enunciado simples, a conjectura mostrada aqui não mostrou nenhum avanço nos últimos anos e se mostra bem distante de ser resolvida.