Série: Tópicos Avançados de Matemática Aplicada

Volume 3: Dinâmica e Espectro

Autovalores e Autovetores: A Essência das Transformações Lineares

Clayton Garcia da Silva

11 de março de 2026

Resumo

Este volume aborda a decomposição espectral de operadores lineares, explorando como a identificação de direções invariantes permite a simplificação de sistemas complexos. Discutimos desde o polinômio característico até a aplicação prática em sistemas dinâmicos e diagonalização de matrizes, seguindo o rigor das publicações técnicas internacionais.

1 Introdução: A Busca pela Invariância Direcional

Em muitos problemas de engenharia e física, estamos interessados em entender como uma transformação linear $T : V \to V$ age sobre o espaço. Frequentemente, a aplicação de uma matriz $\mathbf{A}$ sobre um vetor $\mathbf{x}$ resulta em uma mudança completa de magnitude e direção. No entanto, existem vetores especiais que, sob a ação de $\mathbf{A}$, mantêm sua direção original.

Definição 1.1. *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Um vetor não nulo $\mathbf{v}$ é dito um **autovetor** de $\mathbf{A}$ se existir um escalar λ tal que:*

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{1}$$

*O escalar λ é denominado **autovalor** associado ao vetor $\mathbf{v}$.*

2 O Polinômio Característico

Para encontrar os autovalores, reescrevemos a equação fundamental como $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Para que existam soluções não triviais, a matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ deve ser singular, ou seja:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{2}$$

Teorema 2.1. *O polinômio $p(\lambda)$ é de grau n. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $\mathbf{A}$ possui exatamente n raízes complexas (autovalores), considerando suas multiplicidades.*

3 Diagonalização e Matrizes de Transição

Dizemos que uma matriz $\mathbf{A}$ é *diagonalizável* se existir uma matriz invertível $\mathbf{P}$ e uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ tais que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \tag{3}$$

As colunas de $\mathbf{P}$ são os autovetores de $\mathbf{A}$, e os elementos da diagonal de $\mathbf{D}$ são os autovalores correspondentes. Esta decomposição facilita o cálculo de potências:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} \tag{4}$$

4 Exemplo Prático

Seja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2)$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 2$. O espaço próprio associado a $\lambda_1 = 5$ é obtido resolvendo $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, resultando no autovetor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5 Conclusão e Aplicações

A análise espectral é a base para o entendimento de sistemas dinâmicos estáveis e para algoritmos de compressão. Em volumes subsequentes, exploraremos como a decomposição em valores singulares (SVD) generaliza esses conceitos para matrizes não quadradas.

Referências

[1] STRANG, Gilbert. *Introduction to Linear Algebra*. 5th ed. Wellesley-Cambridge Press, 2016.

[2] LAY, David C. *Linear Algebra and Its Applications*. Pearson, 2020.