MAC0499 - Trabalho de Formatura Supervionado
Proposta para Monografia

$\mathcal{S}$-caminhos

Aluno: Marcio Takashi Iura Oshiro
Supervisor: José Coelho de Pina Jr.

Projeto de iniciação científica
parcialmente financiado pela FAPESP

1 Introdução

O tópico deste projeto de iniciação científica pertence a otimização combinatória que é um campo da matemática aplicada que usa técnicas de combinatória, programação matemática e teoria de algoritmos para resolver problemas em otimização sobre estruturas discretas.

Neste projeto estudamos o problema de encontrar uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos considerado por Mader. Se (V, E) é um grafo, T uma parte de V e $\mathcal{S}$ uma partição de T, um $\mathcal{S}$-caminho é um caminho com pontas em partes distintas de $\mathcal{S}$.

Assim, o problema que consideramos é formulado da maneira mostrada abaixo.

> **Problema** MADER$(V, E, \mathcal{S})$: Dado um grafo (V, E) e uma partição $\mathcal{S}$ de uma parte de V, encontrar uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos.

Mader [6] obteve uma fórmula min-max para o número máximo de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos e Schrijver [7] apresentou uma demonstração extremamente curta para essa fórmula. Essa fórmula tem como conseqüências as fórmulas de Tutte-Berge para o número máximo de arestas em um emparelhamento, de Menger para o número máximo de RS-caminhos disjuntos em um grafo e de Gallai para o número máximo de T-caminhos disjuntos em um grafo.

Até poucos anos atrás, o único algoritmo eficiente conhecido para encontrar uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos havia sido obtido por Lovász através de uma redução ao *linear matroid matching* [4]. Em 2004, Chudnovsky, Geelen, Gerards, Goddyn, Lohman e Seymour [2] apresentaram uma fórmula min-max que generalizou a de Mader e logo em seguida Chudnovsky, Cunningham e Geelen [1] obtiveram um algoritmo baseado na estrutura dessa nova fórmula e de idéias apresentadas no livro *Matching Theory* de Lovász e Plummer [5].

2 Objetivos

Neste projeto o foco será o estudo de diversos problemas clássicos relacionados ao problema MADER. Entre tais problemas destacamos o de encontrar emparelhamento máximo, empacotamento de RS-caminhos e de T-caminhos. Será dado maior ênfase nos problemas envolvendo emparelhamentos.

Além dos problemas mencionados anteriormente, estudaremos tópicos de combinatória poliédrica. Combinatória poliédrica trata das aplicações de métodos de programação linear, especialmente dualidade, à resolução de problemas em otimização combinatória.

Pretendemos descrever em um só texto as fórmulas min-max de Mader ($\mathcal{S}$-caminhos), de Gallai (T-caminhos), de Menger (RS-caminhos), Tutte-Berge (emparelhamentos), os teoremas de estrutura de Gallai-Edmonds (emparelhamentos) e Sebő e Szegő [9] ($\mathcal{S}$-caminhos) e o algoritmo de Edmonds para encontrar emparelhamentos máximos.

Devido a relação íntima entre o problema MADER e a teoria dos emparelhamentos, decidimos que o nosso guia nesse projeto será o livro *Matching Theory* de Lovász e Plummer [5]. Este é um livro fascinante onde muitas das técnicas em otimização combinatória são apresentadas usando como "plano de fundo" a teoria dos emparelhamentos. Para tópicos mais recentes consultaremos o capítulo 73 de Schrijver [8] e o artigo de Sebő e Szegő [9].

3 Atividades já realizadas

Começei estudando a teoria dos emparelhamentos através do livro do Lovász [5]. Para entender melhor alguns teoremas usei o livro de teoria dos grafos de Diestel [3] como apoio.

Lendo o primeiro capítulo do livro de Lovász [5] aprendi alguns resultados fundamentais na teoria dos emparelhamentos, como os teoremas de Kőnig, Hall e Frobenius. O teorema de Kőnig é considerado um dos mais importantes na teoria dos emparelhamentos. Ele relaciona o número de arestas em um emparelhamento máximo com o número de vértices em uma cobertura por vértices mínima em um grafo bipartido.

Em seguida estudei o teorema de Berge que caracteriza um emparelhamento máximo através do conceito de caminhos alternantes. A idéia dos caminhos alternantes é muito usada na teoria dos emparelhamentos. Um exemplo disso é o algoritmo para encontrar emparelhamentos máximos em grafos bipartidos conhecido como método húngaro.

Outro problema visto foi o do sistema de representantes distintos, que apesar se ser um problema de teoria dos conjuntos é facilmente traduzido para a linguagem de grafos e resolvido pelo teorema de Hall.

Estudei alguns resultados clássicos relacionados à emparelhamentos máximos e perfeitos, tais como o teorema de Tutte que caracteriza grafos com emparelhamentos perfeitos, o lema de Gallai que dá uma condição suficiente para um grafo ser fator-crítico e a fórmula de Berge para cálculo da deficiência de um grafo. Outro tópico importante estudado foi o teorema da estrutura de Gallai-Edmonds.

Atualmente estou estudando barreiras, que são conjuntos de vértices que geram o máximo na fórmula de Berge.

4 Cronograma para o segundo semestre

As atividades planejadas para o segundo semestre são:

1. Estudar emparelhamentos no contexto de programação linear (capítulo 7 [5]);
2. Estudar algoritmos para encontrar emparelhamentos máximos (capítulo 9 [5]);
3. Estudar emparelhamento de matróides (capítulo 11 [5]);
4. Estudar os artigos de Schrijver [7] e Sebő e Szegő [9];
5. Preparar o pôster e a apresentação do trabalho;
6. Redigir o texto da monografia e revisá-lo.

O cronograma para as atividades planejadas segue abaixo:

Atividade	JUL	AGO	SET	OUT	NOV
1	$\surd$				
2	$\surd$	$\surd$			
3		$\surd$	$\surd$	$\surd$	
4				$\surd$	$\surd$
5				$\surd$	$\surd$
6	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$

5 Estrutura esperada da monografia

Pretendo começar a parte técnica descrevendo o que são emparelhamentos em grafos, explicando o problema de encontrar um emparelhamento máximo e apresentando resultados importantes como o teorema de Kőnig, de Hall, de Tutte, de Tutte-Berge e a estrutura de Gallai-Edmonds.

Explicarei brevemente o problema de empacotamento de RS-caminhos e o teorema de Menger que dá uma fórmula min-max para o número máximo de RS-caminhos disjuntos. O mesmo será feito com o problema de empacotamento de T-caminhos e o teorema de Gallai que dá uma fórmula min-max para o número máximo de T-caminhos disjuntos.

Em seguida descreverei o problema de empacotamento de $\mathcal{S}$-caminhos. Assim como nos problemas anteriores, o teorema de Mader dá uma fórmula min-max para o número de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos. Terminarei explicando a estrutura de Sebő e Szegő e mostrando como particularizar a fórmula de Mader para a de Tutte-Berge, Menger e Gallai.

A estrutura esperada da monografia será a seguinte:

- Introdução
- Parte técnica
  - Emparelhamentos
    - Teorema de Tutte-Berge
    - Estrutura de Gallai-Edmonds
  - Empacotamento de RS-caminhos
    - Teorema de Menger
  - Empacotamento de T-caminhos
    - Teorema de Gallai
  - Empacotamento de $\mathcal{S}$-caminhos
    - Teorema de Mader
    - Estrutura de Sebő e Szegő
    - Particularizando o teorema de Mader
- Parte subjetiva
  - Desafios e frustrações
  - Relacionamento com o curso
  - Interação com o supervisor
  - Conclusões e observções

Referências

[1] M. Chudnovsky, W.H. Cunningham e J. Geelen, *An algorithm for packing non-zero A-paths in group-labeled graphs*, Preprint, September 2004.

[2] M. Chudnovsky, J. Geelen, B. Gerards, L. Goddyn, M. Lohman e P. Seymour, *Packing non-zero A-paths in group-labelled graphs*, Preprint, October 2004.

[3] R. Diestel, *Graph Theory : Electronic Edition*, Springer Verlag, 2005.

[4] L. Lovász, Matroid matching and some applications, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **28** (1980), 208–236.

[5] L. Lovász e M.D. Plummer, *Matching theory*, Annals of Discrete Mathematics, vol. 29, Noth-Holland, Budapest, 1986.

[6] W. Mader, Über die Maximalzahl kantendisjunkter A-Wege, *Archiv der Mathematik (Basel)* **31** (1978), 387–402.

[7] A. Schrijver, A short proof of Mader $\mathcal{S}$-paths theorem, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **85** (2001), 319–321.

[8] ———, *Combinatorial optimization: Polyhedra and efficiency*, Algorithms and Combinatorics, vol. 24, Springer, 2003.

[9] A. Sebő e L. Szegő, The path-packing structure of graphs, *Proceedings of the 10th Integer Programming and Combinatorial Optimization* (Berlin) (D. Bienstock e G. Nemhauser, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 3064, 2004, pp. 256–270.