MAC0499 – Trabalho de Formatura Supervisionado
Proposta para Monografia

Diferentes abordagens para problemas de empacotamento

Aluno: Rafael Durbano Lobato
Orientador: Ernesto G. Birgin
Tipo de trabalho: Iniciação científica (com apoio financeiro da FAPESP)

Resumo

O problema clássico de empacotamento de retângulos em retângulos consiste em arranjar ortogonalmente itens retangulares, de dimensões (l, w), num retângulo maior, de dimensões (L, W), sem sobreposição. O objetivo é determinar uma disposição com a maior quantidade possível de itens. Conjectura-se que a versão não-guilhotinada do problema é NP-difícil. Neste trabalho abordaremos este problema, assim como uma variante na qual os itens retangulares devem ser empacotados em regiões convexas arbitrárias. Para os dois problemas, estudaremos os métodos existentes e proporemos novos modelos e algoritmos.

Palavras-chave: Empacotamento, modelos, programação não-linear, programação dinâmica, algoritmos recursivos.

1 Resumo da monografia a ser desenvolvida

Neste trabalho abordaremos inicialmente duas variantes do problema de empacotamento de retângulos: (a) empacotamento ortogonal de retângulos em retângulos (problema de carregamento de palete – PCP) e (b) empacotamento "ortogonal" de retângulos em regiões convexas arbitrárias. O PCP consiste em arranjar, sem sobreposição, caixas retangulares idênticas num palete retangular. As caixas devem ser colocadas ortogonalmente, isto é, seus lados devem ser paralelos aos lados do palete, e podem sofrer rotações de 90°. O objetivo é determinar um arranjo com a maior quantidade possível de caixas.

1.1 Algoritmo *L*: *raster points* e limitantes

Morabito e Morales [13] apresentaram um método para empacotar ortogonalmente retângulos idênticos (l, w) e (w, l) em um retângulo (L, W), sem sobreposição, considerando que l, w, L, W são inteiros positivos satisfazendo $w \leq l$, $l \leq W$ e $l \leq L$. Trata-se de um procedimento recursivo, que divide o retângulo em cinco partes (seguindo o padrão de corte não-guilhotinado de primeira ordem), cada uma destas com tamanhos (L_i, W_i), conforme a Figura 1, e resolve o problema para cada uma destas novas partes.

Os locais onde são feitas as divisões são determinados pelas coordenadas x_1, x_2, y_1 e y_2, como mostra a Figura 2. Como x_1 e x_2 pertencem ao conjunto $\{x \mid 0 \leq x \leq L-w\}$ e y_1

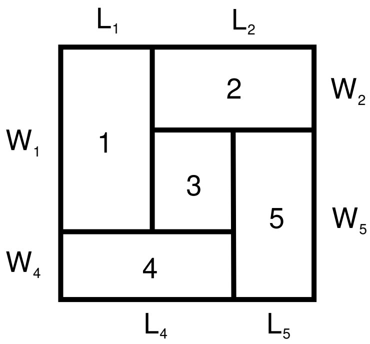

Figura 1: Divisão do retângulo em cinco partes.

e y_2 ao conjunto $\{y \mid 0 \leq y \leq W - w\}$, existem infinitas possibilidades de particionamento do palete. No entanto, pode-se mostrar que estes conjuntos podem ser reduzidos, sem perda de generalidade, aos conjuntos normais (Beasley [1])

$$\begin{aligned} X &= \{x \mid x = rl + sw,\ x \leq L,\ r, s \in \mathbb{Z}^+\} \\ Y &= \{y \mid y = tw + ul,\ y \leq W,\ t, u \in \mathbb{Z}^+\} \end{aligned}$$

ou aos conjuntos dos *raster points* (Scheithauer e Terno [7])

$$\begin{aligned} X' &= \{\langle L - x \rangle_X \mid x \in X\} \ \cup\ \{0\} \\ Y' &= \{\langle W - y \rangle_Y \mid y \in Y\} \ \cup\ \{0\}, \end{aligned}$$

onde $\langle s' \rangle_S = \max\ \{s \mid s \in S, s \leq s'\}$. Esses conjuntos formam uma grade de pontos, limitando as possibilidades de particionamento.

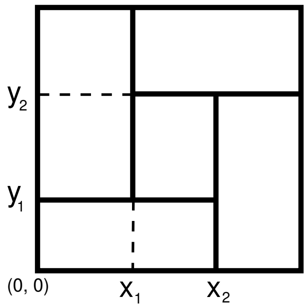

Figura 2: Pontos $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$ que determinam a divisão do retângulo.

Em outro trabalho, Lins, Lins e Morabito [10] propuseram substituir o particionamento recursivo em cinco regiões por um particionamento recursivo de um retângulo (R) ou uma peça em forma de L (L) em duas peças, cada uma das quais sendo um R ou um L. A eficiência do método depende fortemente da quantidade de partições e do cálculo de limitantes para o número de itens retangulares que podem ser empacotados num determinado objeto. A Figura 3 mostra um exemplo de uma das possíveis divisões em L. Apesar dos autores afirmarem que há sete formas de particionar um retângulo, aparentemente existem mais duas, ilustradas na Figura 4, não relacionadas neste artigo.

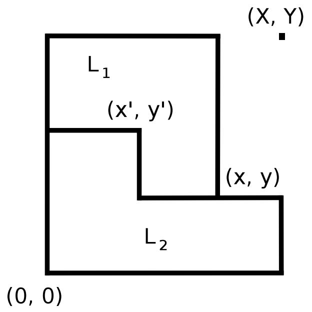

Figura 3: Exemplo de divisão de um L em dois L's.

Em [10] os autores informam que foi possível resolver todos os problemas de testes (mais de 20000, incluindo as 18 instâncias não resolvidas pelo método anterior). Eles conjecturaram que a abordagem em L sempre encontra empacotamentos ótimos de retângulos (l, w) em peças retangulares.

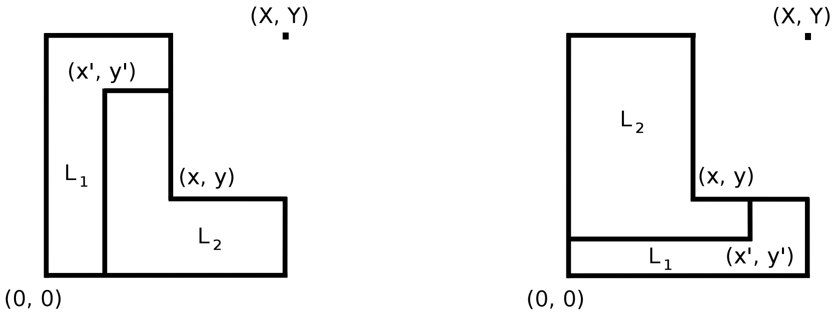

Figura 4: Duas formas de particionar um retângulo em dois L's, possivelmente não cobertas pelas divisões relacionadas em [10].

Neste estudo queremos agregar ao método proposto em [10] as vantagens da utilização dos conjuntos dos *raster points* para formar a grade de particionamento. A cardinalidade destes conjuntos é menor do que a dos conjuntos normais, podendo-se reduzir consideravelmente a quantidade de chamadas recursivas ao método. Outro ponto importante a ser abordado é o da determinação eficiente de bons limitantes, principalmente inferiores, para o número de caixas que podem ser arranjadas em um retângulo. Experimentos realizados em [13] revelaram que o método pode se tornar muito mais eficiente começando-se com um bom limitante inferior. É possível, também, que uma combinação dos algoritmos propostos em [13] e [10] resulte num programa com melhor desempenho, utilizando-se os resultados do primeiro algoritmo como limitantes iniciais para o segundo.

Finalmente, analisaremos se a inclusão dos novos padrões de cortes (apresentados neste projeto) permite resolver o problema apresentado em [10] como contra-exemplo de que o Algortimo-L é ótimo para o problema de empacotar retângulos num objeto com forma de L.

1.2 Modelos não-lineares

Modelos não-lineares têm sido recentemente empregados com sucesso para modelar diversos problemas de corte e empacotamento. Uma formulação não-linear para o problema bidimensional de cortes não-guilhotinados foi apresentada em [2], onde o modelo foi utilizado para a definição de uma heurística populacional. O Método de Sentinelas para empacotamento de itens poligonais em objetos arbitrários foi introduzida em [5]. O método é baseado em análise convexa e formulações não-lineares para o tratamento da sobreposição dos itens. Modelos não-lineares também foram utilizados com sucesso em outros problemas de empacotamento, como o empacotamento de moléculas [9] e o empacotamento de itens circulares em diversos tipos de objetos [3, 14, 8, 11], dentre outros.

Em [4] é considerado o problema de empacotar, ortogonalmente, itens retangulares em regiões convexas. O problema é modelado como o problema de decidir se é possível empacotar m retângulos, com base em um conjunto de equações e inequações não-lineares que compõem as restrições do problema. Ao contrário deste, que possui restrições sobre a orientação dos retângulos, o Método de Sentinelas [5] permite rotações livres dos itens. A idéia principal está na definição de um conjunto de pontos sobre cada item, com a propriedade de que dois itens estão sobrepostos se, e somente se, pelo menos um destes pontos de um item está no interior do outro. Tais pontos são chamados de sentinelas e estão ilustrados na Figura 5.

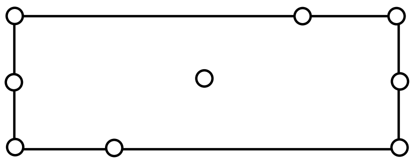

Figura 5: Exemplo de um conjunto de sentinelas sobre um retângulo.

No caso do corte (ou empacotamento) possuir restrições de ortogonalidade, os modelos são mais simples, no sentido de que os problemas são mais fáceis de resolver, e são variantes do modelo proposto em [4]. Esta situação pode ocorrer, por exemplo, quando uma máquina não possui liberdade para efetuar cortes em diversas direções, permitindo apenas cortes ortogonais, ou quando o material a ser cortado é anisotrópico e deve-se manter uma determinada orientação no desenho das peças. Por outro lado, se for interessante permitir rotações livres dos itens a serem empacotados ou cortados, então as restrições serão baseadas no conceito de sentinelas.

2 Objetivos

Com relação ao problema de carregamento de palete, pretendemos:

(i) Considerar a possibilidade de utilizar a solução obtida pelo método heurístico proposto em [13] como limitante inferior inicial para o Algoritmo-L. Será importante avaliar se o ganho obtido considerando este limitante compensará o custo de calculá-lo.

(ii) Diminuir a quantidade de subproblemas que devem ser resolvidos incorporando à implementação do método o conceito de *raster points* [7].

(iii) Pretendemos ainda, incorporar ao Algoritmo-L duas formas de particionar um objeto em forma de L que não foram consideradas em [10]. Analisaremos se, incorporando esses novos particionamentos, é possível achar a solução ótima de um problema específico de empacotar retângulos num objeto com forma de L [10] que não é resolvido pela versão atual do método.

Com relação ao problema de empacotar itens retangulares numa região convexa arbitrária, seguiremos de perto os métodos propostos em [5, 4]. Em [5] foi abordado o problema de empacotar itens retangulares em regiões convexas arbitrárias com rotações livres. Em [4] foi abordado o mesmo problema, mas restringindo o empacotamento a configurações com os itens ortogonais aos eixos cartesianos. No primeiro caso, a liberdade das rotações livres tem o potencial de permitir que um número maior de itens seja empacotado. Porém, o modelo que considera as rotações livres, baseado no conceito de “Sentinelas”, é um modelo de programação não-linear mais difícil de ser resolvido do que o modelo do problema que só permite rotações ortogonais.

Pretendemos desenvolver um novo modelo que tente capturar as vantagens dos dois modelos anteriores: (i) ter o potencial de empacotar um número maior de itens; e (ii) ser fácil de resolver. Estamos nos referindo a um modelo que modele a situação na qual os retângulos têm que ser ortogonais entre si, mas não necessariamente ortogonais aos eixos cartesianos. Esse modelo será adequado para o problema de corte no qual a máquina de corte está restrita a fazer cortes ortogonais, mas o objeto a ser cortado é isotrópico e, portanto, os itens não precisam ter uma orientação fixa dentro do objeto.

3 Atividades já realizadas

Estudamos e implementamos o algoritmo descrito em [13], incorporando de forma eficiente os conjuntos de *raster points* [7]. Também estudamos e implementamos o algoritmo descrito em [10]. Incorporamos os *raster points* ao Algoritmo-L e introduzimos duas novas formas de dividir uma peça em L em dois novos L's, que não estavam previstas em [10].

Provamos resultados importantes a respeito dos *raster points*. Em particular, provamos resultados que mostram que: (i) as simetrias envolvidas nas divisões dos retângulos continuam válidas com a utilização de *raster points* e (ii) a quantidade de memória exigida para armazenar informações dos subproblemas pode ser ainda menor do que foi mostrado em [6].

4 Cronograma de atividades para o segundo semestre

- **Julho:** Realizar experimentos com problemas conhecidos na literatura, apresentar resultados preliminares da implementação e comparar o método modificado com a versão original.
- **Agosto a novembro:** Desenvolver o modelo de programação não-linear que representa o caso de um único ângulo de rotação para todos os itens. Tentar resolver o modelo com algoritmos clássicos de programação não-linear (p.e., [12]).
- **Novembro:** Redação da parte subjetiva da monografia e elaboração da apresentação e do pôster do trabalho.

5 Estrutura esperada da monografia

A monografia será composta por duas partes: uma parte técnica, na qual descreverei o trabalho realizado e uma parte subjetiva, onde será relacionada a experiência adquirida na iniciação científica com o Bacharelado em Ciência da Computação. A estrutura esperada da monografia será a seguinte:

- Parte técnica
  - Resumo;
  - Introdução;
  - Objetivos do trabalho;
  - Algoritmo de cortes não-guilhotinados de primeira ordem;
  - Algoritmo-L;
  - Modelos não-lineares;
  - Conclusões;
  - Bibliografia.
- Parte subjetiva
  - Desafios e frustrações;
  - Disciplinas cursadas no BCC mais relevantes para o trabalho;
  - Interação com o orientador;
  - Passos que tomaria se continuasse atuando na área;
  - Conclusões.

Referências

[1] J. E. Beasley. An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure. *Operations Research*, 83:49–64, 1985.

[2] J. E. Beasley. A population heuristic for constrained two-dimensional non-guillotine cutting. *European Journal of Operation Research*, 156:601–627, 2004.

[3] E. G. Birgin, J. M. Martínez and D. P. Ronconi. Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container: A nonlinear approach. *European Journal of Operational Research*, 160:19–33, 2005.

[4] E. G. Birgin, J. M. Martínez, F. H. Nishihara e D. P. Ronconi. Orthogonal packing of rectangular items within arbitrary convex regions by nonlinear optimization. *Computers & Operations Research*, 33:3535–3548, 2006.

[5] E. G. Birgin, J. M. Martínez, W. F. Mascarenhas e D. P. Ronconi. Method of Sentinels for Packing Objects within Arbitrary Regions. *por aparecer em Journal of the Operational Research Society*, 2005.

[6] E. G. Birgin, R. Morabito and F. H. Nishihara. A note on an L-approach for solving the manufacturer's pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, 56:1448–1451, 2005.

[7] G. Scheithauer e J. Terno. The G4-Heuristic for the Pallet Loading Problem. *Journal of the Operational Research Society*, 47(4):511–522, 1996.

[8] H. Wang, W Huang, Q. Zhang e D. Xu. An improved algorithm for the packing of unequal circles within a larger containing circle. *European Journal of Operational Research*, 141:440–453, 2002.

[9] J. M. Martínez e L. Martínez. Packing optimization for automated generation of complex system's initial configurations for molecular dynamics and docking. *Journal of Computational Chemistry*, 24:819–825, 2003.

[10] L. Lins, S. Lins e R. Morabito. An L-approach for packing (ℓ, w)-rectangles into rectangular and L-shaped pieces. *Journal of the Operational Research Society*, 54(7):777–789, 2003.

[11] N. Mladenović, F. Plastria e D. Urošević. Reformulation descent applied to circle packing problems. *Computers and Operations Research*, 32(9):2419–2434, 2005.

[12] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez e M. L. Schuverdt. Augmented Lagrangian methods under the Constant Positive Linear Dependence constraint qualification. *Mathematical Programming*, 2005.

[13] R. Morabito e S. Morales. A simple and effective recursive procedure for the manufacturer's pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, 49(8):819–828, 1998.

[14] Y. G. Stoyan e G, Yaskov. A mathematical model and solution method for the problem of packing various-sized circles into a strip. *European Journal of Operational Research*, 156:590–600, 2004.