Programação Quadrática Aplicada à Teoria Moderna de Finanças

Fabio Silva Dias

Orientador: Ernesto Julián Goldberg Birgin

Resumo

Desde meados de 1950, estudiosos de finanças e de otimização têm dedicado sua pesquisa a um ramo muito interessante da economia, conhecido como Teoria Moderna de Finanças. O objetivo deste trabalho é detalhar as principais conclusões observadas pelos estudiosos desta teoria, mais precisamente com respeito à Teoria de Carteiras, cujo principal objetivo e delimitar portfolios eficientes com relação a risco e retorno. Iniciamos o trabalho explicando conceitos básicos e a forte relação que há entre os estudos de otimização, principalmente Programação Não-Linear, e os estudos da Teoria de Carteiras. Após isto, uma forma de resolver eficientemente o problema de finanças é detalhada, a partir dos estudos de Markowitz (método da Linha Crítica), que foram aperfeiçoados e culminaram no método de Wolfe para Programação Quadrática. Apresentamos também um estudo de caso, onde geramos portfolios eficientes durante 24 meses, divididos em 12 meses onde o mercado foi de alta e 12 meses onde o mercado foi de baixa. Comparamos a performance obtida praticando a gestão ativa proposta neste trabalho com o resultado que seria obtido por meio de uma gestão passiva da carteira de ações.

Terminamos o trabalho com uma apresentação das limitações deste modelo quadrático, apresentando estudos recentes para o problema dos portfolios eficientes e um possível modelo, também de Programação Não-Linear, que possa ser utilizado para obter uma visão teórica mais realista do problema dos portfolios eficientes.

Sumário

Capítulo 1 – Definições Básicas

1.1. O Problema Clássico de Finanças

Um investidor em ativos com risco quer determinar qual é a combinação dos seus investimentos (que doravante será chamada de portfolio ou carteira) que maximiza a relação entre retorno e risco dos mesmos, obtendo uma combinação que possua maior retorno possível por unidade de risco.

No nosso modelo, temos como dados do problema um vetor de retornos, onde cada componente *i* deste vetor é o retorno esperado para o ativo *i* no horizonte considerado:

$$r = (r_1, r_2, ..., r_n)$$

Além disso, temos uma matriz de covariâncias como a descrita a seguir:

$$Cov = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{21} & \cdots & \sigma_{n1} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \sigma_i^2 = VARIANCIA(i) \\ \sigma_{ij} = COVARIANCIA(i, j) \end{matrix}$$

Esta matriz tem a propriedade de ser positiva definida.

O retorno esperado para um portfolio composto por *n* títulos é *x'r*, onde cada componente *i* do vetor $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ é o percentual dos recursos que um investidor possui alocados em cada ativo *i* e o risco deste mesmo portfolio é *x´Cov x*. Por hipótese, o investidor irá alocar todos os seus recursos disponíveis no portfolio escolhido.

Desta forma, como é necessário achar uma relação ótima entre retorno e risco, basta resolver o seguinte problema de Programação não Linear:

1.1.1

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{x' r - R_f}{\sqrt{x' Cov.x}} \\ s.a. \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{aligned}$$

Onde R_f é o retorno de um ativo sem risco.

Existem vários métodos de Programação não Linear que podem ser utilizados para resolver este problema. Um deles pode ser resumido da seguinte forma. Vamos substituir a restrição na função objetivo. Cumpre observar que a substituição que iremos fazer a seguir não funciona para qualquer problema de maximização. Poderemos utilizar aqui porque o sistema de equações diferenciais do problema contém equações homogêneas de grau zero.

Seja $R_f = 1R_f$. O problema a resolver pode ser rescrito como a seguir:

$$\max \quad \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (r_i - R_f)}{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} x_i \, x_j \sigma_{ij} \right]^{1/2}}$$

Para resolvê-lo, basta achar o gradiente da função objetivo. No ponto onde este vetor for igual a zero, teremos um ponto de máximo, pois o novo problema é irrestrito e a segunda derivada da função objetivo é sempre negativa. Este fato é garantido pela estrutura do problema, conforme provado em [1].

Isto é equivalente a resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$\frac{d\theta}{dx_i} = 0, \forall i$$

Mas é provado em [1] que, para cada *i*, a equação acima é equivalente a:

$$-\left(wx_i \sigma_{1i} + wx_2 \sigma_{2i} + \ldots + wx_i \sigma_i^2 + \ldots + wx_{n-1} \sigma_{n-1i} + wx_n \sigma_{ni} \right) + r_i - R_f = 0$$

Com $w = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i (r_i - R_f)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}}$

Portanto, resolver o sistema de equações diferenciais proposto pode ser reduzido a resolver um sistema $Cov.Z = \overline{R}$ onde Z é um vetor cuja componente $Z_k = wx_k$ e $\overline{R}$ é um vetor cuja componente $\overline{R_k} = r_k - R_f$.

O último passo é resolver o sistema achando Z e depois normalizando a solução encontrada (para que a soma das componentes de x seja igual a 1), pois Z é proporcional a x.

1.2. Estendendo o Problema

O problema proposto pode ser estendido para se tornar mais real. Há várias extensões possíveis:

- Restrição de caixa: $l \leq x \leq u$

- Inclusão de diversas restrições lineares como: concentração de patrimônio, beta da carteira, liquidez das ações pertencentes à carteira, *dividend yield*, etc.

- Parametrizar a aversão ao risco do investidor. Desta forma o nosso algoritmo não só acharia a carteira com o maior retorno possível por unidade de risco, mas também acharia, dado um certo retorno, a carteira que consegue tal retorno com o menor risco possível. Isto também permitiria o desenho da Fronteira Eficiente de Markowitz, ou seja, o lugar geométrico das carteiras de mínimo risco.

O problema estendido poderia ser formulado da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{ll}
\min & x'\,Cov\,x - \lambda x' R \\
 & Ax = b \\
s.a. & Cx \leq d \\
 & l \leq x \leq u
\end{array}
$$

Poderíamos encontrar todas as soluções possíveis deste problema, para todos os valores de $\lambda \geq 0$. Isto seria resolver um problema quadrático paramétrico, cujo algoritmo foi inicialmente proposto por Harry Markowitz em 1956 e formalizado por Wolfe em 1959.

O algoritmo utilizado recebeu o nome de método de Wolfe. Seu estudo e implementação serão tema do próximo capítulo.

Capítulo 2 – Métodos para Resolver o Problema Quadrático

2.1. Formulação de um Modelo Quadrático

O problema modelado em **1.3.** pode ser reduzido ao seguinte problema de programação quadrática (QP):

2.1.1
$$\begin{aligned} &\min \quad x'Cx + \lambda x'r \\ &s.a. \quad x \in \Im, \Im = \{x \mid Ax \le b, x \ge 0\} \end{aligned}$$

onde C é uma matriz n por n e possui as seguintes propriedades:

- C é positiva definida
- Existe algum $q \in \Re^n$ tal que $r = Cq$.

Além disso, r é um vetor onde cada componente i seja o retorno do ativo i menos o retorno de um ativo sem risco. As restrições de igualdade propostas em **1.3.** podem ser trocadas por duas de desigualdade enquanto que as restrições de **1.3.** que aceitem um valor negativo para alguma componente de x podem ser reduzidas ao (QP) por meio de introdução de variáveis artificiais.

Uma vez que a função objetivo é quadrática e convexa, para resolver o (QP), será necessário achar uma solução que satisfaça as condições de Kuhn-Tucker para o problema. Estas condições são necessárias e suficientes para a otimalidade da solução encontrada. É possível implementar métodos baseados no Simplex que resolvam este problema. Um deles foi proposto por Wolfe em [2], com duas variações. Uma delas resolve o problema para um valor fixo de λ (chamada de "short form" no artigo original) e a outra resolve o problema de forma paramétrica em λ (chamada de "long form" no artigo original). Estes métodos resolvem o problema (QP) em um número finito de passos.

Markowitz havia proposto um método de otimização de uma função quadrática com restrições lineares 3 anos antes de Wolfe, este método é diferente do proposto por Wolfe, mas prova-se que ambos geram a mesma solução.

2.2. O Método de Wolfe

O método descrito abaixo resolve o problema para qualquer valor fixo do parâmetro. O primeiro passo é introduzir vetores de folga não negativos $y \in \Re_+^m, v \in \Re_+^n$ definidos por:

$$\begin{aligned} &y = b - Ax \ge 0, \\ &v = Cx + A'u + \lambda r \ge 0, \end{aligned}$$

onde $u \in \Re_+^m$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange.

Um par de variáveis x_j, v_j será chamado de par complementar e o outro par de variáveis y_i, u_i será chamado de par de variáveis complementares desta sentença.

Com esta notação as condições de Kuhn-Tucker pertencentes ao modelo sobrescrito são da seguinte forma:

2.2.1 (a) $x, y, v, u \geq 0$
(b) $Ax + y = b$
(c) $-Cx + v - A'u = \lambda r$
(d) $x'v + y'u = 0$

Em [3] está demonstrado o seguinte teorema:

As partes x, y *de qualquer solução para as condições de Kuhn-Tucker são um vértice do seguinte poliedro:*

$$\mathrm{M} = \{[x', u'] \ t.q. \ Ax \leq b, -Cx - A'u \leq \lambda r, x \geq 0, u \geq 0\}$$

Desta forma o problema de encontrar a solução de **2.2.1** fica reduzido ao problema de encontrar uma base admissível B da matriz:

$$D = \begin{bmatrix} A & E & 0 & 0 \\ -C & 0 & E & -A' \end{bmatrix}$$

A base é admissível no fato de que $B^{-1}\begin{bmatrix} b \\ \lambda r \end{bmatrix} \geq 0$.

Nesta matriz D a coluna j-ésima de $\begin{bmatrix} A \\ -C \end{bmatrix}$ (a variável x_j) e a coluna j-ésima de $\begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}$ (a variável v_j) não devem ser básicas ao mesmo tempo, e o mesmo se aplica a $\begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ -A' \end{bmatrix}$ correspondentes às variáveis y_i e u_i.

Para este propósito nós introduzimos variáveis artificiais em **2.2.1 (c)** de modo que uma base inicial artificial poderia ser formada sem as colunas $\begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ -A' \end{bmatrix}$, isto é, sem qualquer componente de v ou y na base. Então **2.2.1 (d)** é garantida o início com $v = 0, u = 0$. A propriedade de complementaridade $x'v + y'u = 0$ será preservada enquanto elimina-se as variáveis artificiais da base, de modo que nós nunca permitimos o par variável complementar x_j, v_j ou y_i, u_i para tornar-se básica. Desta maneira a solução para **2.2.1** será obtida quando a parte x resolve **2.1.1.**

Após a breve descrição dada acima, podemos formular um algoritmo de Programação Quadrática como o descrito a seguir:

Fase 0. Resolva o seguinte problema de programação linear:

2.2.2
$$\begin{aligned} \max \quad & -e' z_1 \\ s.a. \quad & x^* \geq 0 \\ & Dx^* = b^* \end{aligned}$$

com $D \equiv [\, A^* \quad E^* \quad E \,]$, $x^* \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z_1 \end{bmatrix}$, A^*, E^* e b^* obtidos da seguinte forma:

Para cada linha j da matriz A^*, $A_j^* = \begin{cases} A_j, & se \quad b_j \geq 0 \\ -A_j, & se \quad b_j < 0 \end{cases}$;

para cada linha j da matriz E^*, $E_j^* = \begin{cases} E_j, & se \quad b_j \geq 0 \\ -E_j, & se \quad b_j < 0 \end{cases}$;

e para cada j, $b_j^* = |b_j|$, sendo que E é a matriz identidade.

tendo como solução factível inicial $x^* \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b^* \end{bmatrix}$ e base inicial $D_{ini} \equiv [\, E \,]$.

Caso 1. Seja o $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}_1$ os vetores encontrados na solução final. Se $-e'\bar{z}_1 \neq 0$ então pare – o problema é inviável. Caso contrário, vá para a fase 1.

Fase 1. Resolva o seguinte problema de programação linear:

2.2.3
$$\begin{aligned} \max \quad & -e' z_2 \\ s.a. \quad & x^{f1} \geq 0 \\ & D^{f1} x^{f1} = b^{f1} \end{aligned}$$

com $D^{f1} \equiv \begin{bmatrix} A^* & E^* & 0 & 0 & 0 \\ -C & 0 & E & -A' & E^{f1} \end{bmatrix}$, $x^{f1} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v \\ u \\ z_2 \end{bmatrix}$, $b^{f1} = \begin{bmatrix} b^* \\ \lambda r \end{bmatrix}$ e também

$E_j^{f1} = \begin{cases} E_j, & se \quad (C\bar{x} + \lambda r)_j \geq 0 \\ -E_j, & se \quad (C\bar{x} + \lambda r)_j < 0 \end{cases}$, para cada linha j da matriz E^{f1}.

Seja D_{fim} a base final da fase 0 e C_{fim} uma matriz formada pelas colunas de $[\, -C \quad 0 \,]$ correspondentes às colunas de $[\, A^* \quad E^* \quad E \,]$ selecionadas por D_{fim}. Para resolver o problema da fase 1, tome como base inicial a matriz:

$$B^1 = \begin{bmatrix} D_{fim} & 0 \\ C_{fim} & E^{f1} \end{bmatrix}$$

cuja solução factível inicial correspondente será:

2.2.4
$$\begin{bmatrix} \hat{x}^1 = \bar{x} \\ \hat{y}^1 = \bar{y} \\ \hat{v}^1 = 0 \\ \hat{u}^1 = 0 \\ \hat{z}_2^1 = E^{f1}(Cx + \lambda r) \end{bmatrix}$$

Resolva o problema **2.2.3** pelo método Simplex, tendo como base inicial B^1 e sua respectiva solução básica **2.2.4** aplicando a seguinte restrição para entrada na base:

2.2.5 Se $\left.\begin{matrix} x_j \\ v_j \\ y_i \\ u_i \end{matrix}\right\}$ é básica então $\left\{\begin{matrix} v_j \\ x_j \\ u_i \\ y_i \end{matrix}\right.$ não deve entrar na base.

(Observe que a solução **2.2.4** satisfaz a condição **2.2.5**.)

Sem a restrição de entrada na base, podemos ter certeza que quando o algoritmo acima descrito parar $e'z_2 = 0$ (pois o problema **2.2.3** necessariamente tem solução ótima). Wolfe provou em [2] que mesmo com esta restrição, ao final do algoritmo o valor ótimo de **2.2.3** será 0 e também provou o seguinte teorema:

*O problema **2.1.1** possui solução ótima se $\Im$ não é vazio e a parte correspondente a x da solução ótima de **2.2.3** sob a restrição **2.2.5** é tal solução.*

Desta forma, elaboramos um modelo mais sofisticado para o problema proposto no capítulo 1 e apresentamos um método baseado no Simplex para soluciona-lo. O método apresentado resolve em um número finito de passos o problema **2.1.1** para um valor fixo do parâmetro λ. Isto significa que, dado um certo nível de aversão ao risco do investidor (λ é inversamente proporcional à aversão ao risco), dada a matriz de covariâncias e o vetor de retornos para cada ativo do mercado e dadas as restrições lineares, podemos calcular qual a carteira que possui melhor relação entre retorno e risco, conhecida na literatura como *portfolio eficiente*.

Contudo se o nosso objetivo é obter todos os portfolios eficientes, ou seja, obter todas as carteiras de mínimo risco ou máximo retorno, será necessário variar o parâmetro λ de $-\infty$ a 0. Isto não parece ser razoável, pois além de ser inviável computacionalmente (uma vez que o algoritmo é baseado no Simplex que tem pior caso exponencial), se tentarmos simplesmente escolher pontos arbitrariamente no intervalo que vai de $-\infty$ a 0 estaremos correndo o risco de não escolher os pontos corretos, isto é, não escolher pontos que passem uma informação significativa.

Para resolver este problema, Wolfe propôs no mesmo artigo uma variação do algoritmo de programação quadrática, chamado de "long form", que encontra de forma mais eficiente uma solução para qualquer valor do parâmetro $\lambda \le 0$. A partir de agora, vamos estudar esta variação.

2.3. A Versão Paramétrica

Conforme observado anteriormente, a solução encontrada pelo algoritmo de otimização de portfolios desejado deve:

- Ter retorno máximo (*x'r*) para o seu nível de risco e;
- Ter risco mínimo (*x' Cov x*) para o seu nível de retorno.

Além disso, seria ideal que o algoritmo encontrasse todos os portfolios de risco mínimo, o que pode ser obtido parametrizando a aversão ao risco do investidor (λ). Já vimos que não é eficiente chamar o algoritmo várias vezes para cada valor do parâmetro. Desta forma, o algoritmo paramétrico deverá chamar sua rotina principal apenas uma vez e depois achar qualquer solução com apenas mais um passo.

Wolfe propôs em sua "long form" um algoritmo baseado na análise de sensibilidade do Simplex onde ele reformula o Problema Quadrático Paramétrico, transformando-o em um problema de Programação Linear e achando valores críticos para λ. Como é um problema de Programação Linear, cada valor crítico de λ corresponde a uma solução (chamada por Markowitz de "carteira de canto") e para qualquer valor de λ entre dois valores críticos a solução correspondente a este valor é uma combinação convexa das duas soluções críticas. Desta forma, o trabalho se resume em achar todos os valores críticos de λ. Tendo uma vez estes valores, achar qualquer solução possível, ou seja, desenhar toda a Fronteira Eficiente, torna-se trivial.

O algoritmo proposto resolve um problema quadrático paramétrico da seguinte forma:

2.3.1
$$\begin{aligned} &\min \quad x'Cx - \lambda x'r \\ &s.a. \quad x \in \Im, \Im = \{x \mid Ax \le b, x \ge 0\} \end{aligned}$$

E o algoritmo só acha valores de $\lambda \ge 0$. Não será necessária nenhuma adaptação no problema original por ele ser idêntico ao proposto por Wolfe.

O algoritmo de Programação Quadrática Paramétrica, que também podemos chamar de *Fase 2 do Método de Wolfe* é o seguinte:

Passo 1. Resolva o problema **2.3.1** com $\lambda = 0$. Seja B^0 a base final e $x^0, y^0, v^0, u^0, z_2^0$ a solução final. Caso alguma coluna correspondente a alguma componente de z_2 esteja em B^0 - ou seja, o vértice é degenerado e esta componente vale 0 – continue o algoritmo até que não haja nenhuma componente de z_2 na base.

Passo 2. Forme o seguinte problema de Programação Linear:

2.3.2
$$\begin{aligned} &\max \quad 2\lambda \\ &s.a. \quad M\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{b}} \\ &\qquad\ \ \overline{\overline{x}} \ge 0 \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} A & E & 0 & 0 & 0 \\ -C & 0 & E & -A' & r \end{bmatrix}$$

2.3.3 onde
$$\overline{\overline{x}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v \\ u \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{b}} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução factível inicial seria $\lambda^0 = 0, x^0, y^0, v^0, u^0$ e sua base B^0. Vá para a fase 2 do Simplex com a restrição **2.2.5**.

Passo 3. Se com a restrição **2.2.5** não há como diminuir $-\lambda$, ou seja a solução ótima é a solução factível inicial, então pare! Não há solução para **2.3.1** com $\lambda \geq 0$.

Passo 4. Se $-\lambda$ pode ser diminuído então **2.3.2** é ilimitado (provado por Wolfe em [2]). Desta forma, a cada iteração r das s iterações do Simplex com a restrição **2.2.5** obteremos uma solução $\overline{\overline{x^r}}, 0 \leq r \leq s$, onde $0 \leq \lambda^0 \leq \lambda^1 \leq ... \leq \lambda^s$, sendo que cada λ^r é o valor da função objetivo na iteração r e x^r é uma solução ótima do problema **2.3.1** para $\lambda = \lambda^r$. Além disso, como **2.3.2** é ilimitado, ao final das s iterações também teremos uma direção de crescimento $x^{s+1}, y^{s+1}, v^{s+1}, u^{s+1}$ tal que

$$\begin{bmatrix} x^s \\ y^s \\ v^s \\ u^s \end{bmatrix} + (\lambda - \lambda^s) \begin{bmatrix} x^{s+1} \\ y^{s+1} \\ v^{s+1} \\ u^{s+1} \end{bmatrix} \text{ é solução ótima para } \forall \lambda \geq \lambda^s.$$

Assim
$$x^\lambda(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{r+1} - \lambda}{\lambda^{r+1} - \lambda^r} x^r + \dfrac{\lambda - \lambda^r}{\lambda^{r+1} - \lambda^r} x^{r+1} & com \quad \begin{cases} \lambda^r \leq \lambda^{r+1} \\ 0 \leq r \leq s-1 \end{cases} \\ \\ x^s + (\lambda - \lambda^s) x^{s+1} & com \qquad \lambda \geq \lambda^s \end{cases}$$

é solução ótima de **2.3.1** para qualquer valor de $\lambda \geq 0$.

2.4. Aplicações do Modelo Quadrático

Até agora foi mostrada uma abordagem quadrática para o problema de otimização de portfolios e junto com ela um método que resolvesse o problema quadrático e obtivesse um portfolio de mínimo risco para qualquer nível de retorno possível de ser atingido, parametrizado pelo escalar λ. Esta foi uma das principais aplicações do modelo de programação quadrática. Além disso, o conjunto de portfolios obtidos por meio do algoritmo de Programação Quadrática Paramétrica, é de importância fundamental para o ramo de otimização financeira. A Fronteira Eficiente procurada no Capítulo 1 corresponde ao lugar geométrico de todos os portfolios possíveis de serem obtidos pelo algoritmo descrito em **2.3.**

Tendo a Fronteira Eficiente em mãos, podemos estimar qual é o portfolio sugerido para qualquer investidor se tivermos em mãos também uma outra função, baseada em características mais intrínsecas do próprio investidor, que nos quantifica o nível de satisfação que ele tem ao fazer um investimento dentre as oportunidades possíveis. Esta função tem o nome de função de utilidade do investidor e seus parâmetros podem ser um valor de retorno esperado, um valor de risco ou até mesmo ambos. A expressão para a função utilidade também pode variar de acordo com o modelo especificado. Detalhes mais técnicos desta função fogem do escopo deste trabalho e podem ser vistos em [1], [4] e [5]. Foram propostos diversos modelos para otimização da função utilidade. Um dos modelos é uma aplicação do critério quadrático estudado até agora.

Seja U(r) a expressão da utilidade em função do retorno, r^l o menor valor de retorno da fronteira obtida (ou seja, o valor de $x'r$ para a solução de **2.3.1** com $\lambda = 0$) e r^u o maior retorno da fronteira (ou seja, o valor de $x'r$ para a solução de **2.3.1** com $\lambda \to +\infty$). Se conhecermos U(r) para um determinado investidor, poderemos formular o seguinte problema:

2.4.1

$$\begin{aligned} &\max \quad U(r) \\ &s.a. \quad r^l \le r \le r^u \end{aligned}$$

Em particular, se U(r) for uma função quadrática (e realmente é quando estudamos investidores com aversão crescente ao risco), podemos resolver **2.4.1** pelo Método de Wolfe.

Uma outra aproximação para a função utilidade foi proposta por Markowitz em [6]. Markowitz usou uma aproximação quadrática da função utilidade para gerar um conjunto de portfolios ótimos no espaço *retorno esperado* x *risco*. A aproximação é baseada na expansão em série de Taylor de U em torno do retorno esperado do portfolio. Assim, para um investidor averso ao risco

$$U(R_p) \cong U(x'r) + U'(x'r)(R_p - x'r) + \frac{1}{2}U''(x'r)(R_p - x'r)^2$$

onde $x'r$ é o retorno esperado para o portfolio ($E(R_p)$) e R_p é o retorno efetivamente observado no período.

Se aplicarmos o operador esperança na equação acima, iremos obter a seguinte igualdade:

$$E[U(R_p)] \cong U(x'r) + \frac{1}{2}U''(x'r)\sigma_p^2$$

A igualdade obtida se assemelha muito à função proposta anteriormente. Na verdade é a mesma. A utilidade esperada do portfolio foi aproximada por uma função que só depende do retorno esperado e da variância do portfolio. Assim, um portfolio obtido pela maximização de uma função $\lambda x'r - \sigma_p^2$ nos fornece uma boa aproximação para a máxima utilidade esperada, para todos os valores de $\lambda \ge 0$.

Podemos citar como mais uma boa aplicação do modelo de programação quadrática um problema muito utilizado também na área financeira, só que mais relacionado a fundos de investimento, bem detalhado em [9]. O problema é muito parecido com o anterior. Conhecido como Análise de Estilo, trata-se de encontrar uma combinação de investimentos em diferentes classes de ativos (os estilos de investimentos), que corresponda a qual foi o estilo realmente seguido pelo administrador do fundo. Torna-se claro que estas classes devem ser mutuamente exclusivas (ou estarem bem próximas disto) e devem representar todos os estilos possíveis de serem seguidos pelo mercado. O objetivo da Análise de Estilo é obter coeficientes semelhantes aos de uma regressão entre os retornos do fundo e das classes, onde cada coeficiente é o percentual do total de investimentos do fundo alocados em ativos da classe correspondente.

As diferenças entre a Análise de Estilo e uma regressão comum residem em dois fatos. O primeiro é que temos restrições. Uma restrição linear, que é fazer com que a soma dos coeficientes seja igual a 1, pois assim como no modelo de otimização de portfolios, por hipótese o investidor aloca todos os seus recursos disponíveis no portfolio e outra restrição de positividade, pois é praticamente impossível operar em posição vendida para todos os ativos de uma determinada classe de investimentos. O segundo fato é que não desejamos minimizar a soma dos erros elevados ao quadrado, mas sim a variância dos erros, pois o objetivo desta análise é inferir o máximo sobre a exposição do fundo a variações nos retornos das classes de ativos durante o período estudado.

Fica claro que, neste ponto, um algoritmo de programação quadrática é necessário, uma vez que desejamos minimizar uma função quadrática e convexa (a variância de uma soma) com restrições lineares. Temos assim, mais uma aplicação do método de Wolfe.

2.5. Um Estudo de Caso: Portfolios Eficientes são Realmente Eficientes?

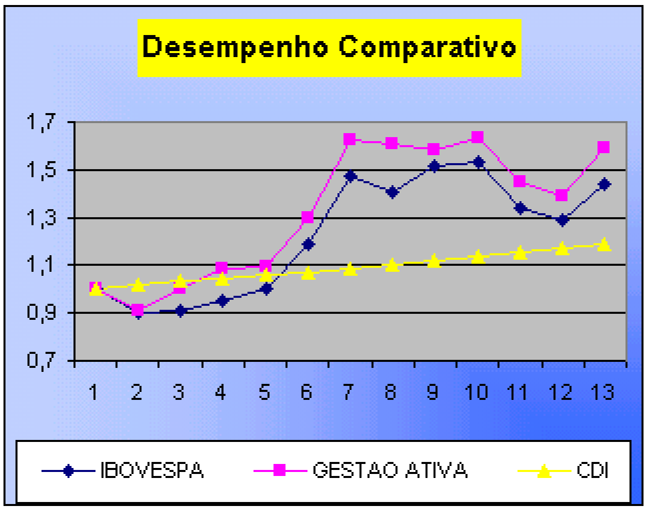
Vamos agora aplicar toda a teoria apresentada a dados reais do mercado de capitais brasileiro. Implementamos o algoritmo em Visual Basic 5.0 (uma versão didática está disponível em http://www.ime.usp.br/~fdias/marreqo.zip) e utilizamos a base de dados do software *HSS Stock Market* - versão 1.3. As séries de preços dos ativos estavam livres de dividendos. Os dados de entrada para o algoritmo foram estimados como a seguir.

Para obter resultados consistentes, resolvemos fazer 24 simulações. Empregou-se como parâmetro básico a carteira de mercado esperada para um mês. A carteira de mercado é o portfolio da fronteira eficiente que tem o maior valor para o quociente definido em **1.1.1**, e pode ser obtido achando o ponto de tangência entre o gráfico da fronteira eficiente e uma reta que passa pelo ponto correspondente ao ativo livre de risco. As simulações foram divididas em dois grupos de 12 meses, onde o primeiro grupo correspondeu ao período de Julho de 1999 a Junho de 2000, no qual a bolsa brasileira esteve em alta, e o segundo grupo correspondeu ao período de Outubro de 2000 a Setembro de 2001, no qual a bolsa esteve em baixa evidente. Para gerar o portfolio sugerido para investimento em um determinado mês, foram utilizados dados mensais passados em um horizonte de doze meses e não foram considerados quaisquer custos de transação e/ou tributos, além de se admitir válido comprar ações em qualquer quantidade, inclusive frações. Para cada estimativa, selecionava-se as 70 ações que possuíssem maior volume médio diário de negócios e que tivessem sido negociadas em pelo menos 200 dias no horizonte considerado.

Para estimar o retorno esperado de cada ativo, primeiramente calculamos a como a média geométrica da taxa simples de retorno do mesmo, definida como o quociente entre o preço da ação no instante $t+1$ e o seu preço no instante t. Esta taxa média foi composta com uma taxa equivalente ao ganho mensal com dividendos durante os doze meses utilizados. O valor obtido menos um é o retorno esperado. Para estimar a matriz de covariâncias, foram utilizados como amostra os prêmios médios sobre o ativo livre de risco. O ativo livre de risco foi o CDI-Over divulgado pela CETIP.

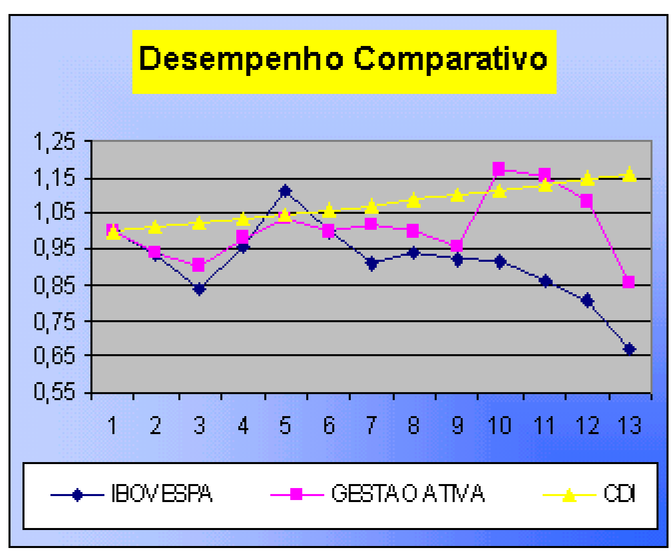
O comportamento de cada portfolio obtido foi comparado com o desempenho do índice de mercado, considerado para estes estudos como o IBOVESPA. Foram utilizados seis critérios de comparação entre os portfolios e o mercado. Os primeiros foram o retorno e o risco, definido como o desvio padrão dos retornos excessivos. Para sermos mais criteriosos na avaliação, introduzimos quatro outros critérios de comparação, sendo um deles o beta do portfolio, ou seja, quanto se espera que oscile o portfolio para cada oscilação unitária do retorno do mercado. É trivial que o beta do IBOVESPA deverá ser sempre igual a 1. O beta pode ser utilizado como uma medida de exposição do portfolio a movimentos do mercado. A estratégia de gestão ativa ideal deverá então obter portfolios de beta baixo durante os períodos em que bolsa estiver em baixa e de beta alto para os períodos em que a bolsa estiver em alta.

Outro critério de comparação utilizado foi o Índice de Sharpe. Este índice corresponde ao quociente entre retorno excessivo e risco, como definido em **1.1.1**. Pode ser interessante classificar dois portfolios por meio deste índice, de forma que quanto mais alto seja o seu valor melhor é o portfolio, contudo este índice só se aplica a portfolios com retorno excessivo maior do que zero, do contrário o cálculo pode gerar inconsistências.



Mais um critério de comparação utilizado foi o Índice de Treynor. Este índice corresponde ao quociente entre retorno excessivo e beta. Assim como no Índice de Sharpe, pode ser interessante classificar dois portfolios por meio deste índice, de forma que quanto mais alto seja o seu valor melhor é o portfolio, contudo este índice só se aplica a portfolios com beta maior do que zero, do contrário este cálculo também pode gerar inconsistências. Assim, o último critério de comparação entre portfolios foi o RAP (*Risk Adjusted Performance*) de Modigliani, que corresponde a quanto seria o retorno de um portfolio se seu risco fosse ajustado ao risco do índice de mercado. É trivial que o RAP do índice de mercado é seu próprio retorno.

As Tabelas 1 e 2 mostram qual foi a composição dos portfolios sugeridos pelo método para cada um dos doze meses de alta e para cada um dos doze meses de baixa. Cada coluna corresponde ao portfolio escolhido para seu respectivo mês. Nas tabelas 3 e 4 estão detalhadas nas primeiras doze linhas os retornos mensais de cada opção de investimento e nas linhas abaixo os indicadores de desempenho dos mesmos, sendo cada coluna correspondente a uma opção de investimento. Nas figuras 1 e 2 temos um gráfico comparativo de retornos entre as opções de investimento disponíveis, correspondente a quanto teria variado um real aplicado em cada uma das opções.



Podemos ver com clareza que uma estratégia de gestão baseada no critério de Markowitz, otimizada pelo Método de Wolfe, teve uma performance muito superior à do mercado, tanto nos períodos de alta como nos períodos de baixa. Em ambos os períodos podemos notar que os portfolios gerados pelo algoritmo tiveram retorno médio, índice de Sharpe e índice de Treynor consistentemente superiores ao do mercado. Além disso, embora em ambos os períodos o risco do portfolio gerado pelo algoritmo fosse levemente maior (a partir da 3.ª casa decimal), a performance ajustada ao risco foi bem superior à do mercado.

Além disso, foi notado que o beta da estratégia gerada foi maior no período de alta, tendo caído consideravelmente no período de baixa, o que confirma o anteriormente falado sobre uma exposição ótima a riscos de mercado. Podemos notar que mesmo durante o período de baixa estudado, enquanto a bolsa acumulava perdas de 19,39% nos 11 primeiros meses, a gestão ativa baseada no algoritmo acumulava ganhos de 8,01%. Estes ganhos só foram dissipados no mês de setembro de 2001, que foi catastrófico para o mercado de renda variável devido aos ataques terroristas aos Estados Unidos, mas ainda assim a estratégia proposta venceu o mercado em 18,84% em um ano. Durante o período de alta a estratégia proposta venceu o mercado em 14,90% em um ano. Sem nenhuma sombra de dúvida, estes resultados não são desprezíveis.

	jul/99	ago/99	set/99	out/99	nov/99	dez/99	jan/00	fev/00	mar/00	abr/00	mai/00	jun/00
BBAS4							0,13404	0,08738				
BOBR4					0,05715	0,1105						
BRHA4							0,20916	0,36208		0,23971		
CBEE3												0,09247
CEEB3			0,25598	0,27757								
COGU4							0,02181					
CPSL3	0,07183											
CRUZ3	0,27161	0,34866	0,3828	0,24774		0,03473						
CSNA3	0,09125	0,09003	0,10002	0,05021	0,06287							
ELAT3			0,01984									
ELET3			0,00325				0,01785					
EMBR3						0,11729						
EMBR4							0,14468	0,0941	0,18832	0,09205	0,21945	0,17194
GETI4												0,0606
ICPI4									0,11341			
ITAU4					0,14382	0,08987						
KLAB4				0,07704	0,10354	0,00486						
LAME4	0,10817											
LIGH3											0,17251	0,00501
OSAO4	0,22744											
PCAR4				0,0396	0,08021		0,19202	0,00085				
PRGA4	0,12749	0,18394	0,10813	0,13117	0,14796	0,12985	0,03756					
PTIP4									0,07264	0,23124	0,07052	0,0765
SOES4	0,10221			0,04662	0,34148	0,40472	0,08734					
TCOC3											0,31618	0,32419
TCSP3				0,03922	0,00642	0,0368	0,11812	0,07081	0,05828			
TEPR4			0,12999	0,09084	0,05655				0,17461			
TLPP3												0,04411
TMCP4		0,15365						0,1955	0,22325	0,27951	0,00062	0,00016
TNLP3		0,22373										
TSEP3						0,07139						
USIM5							0,01106	0,1032	0,13688	0,12237		
VALE3								0,08607			0,22073	0,22502
VALE5							0,02638		0,03261	0,03513		

Tabela 1 – Composição dos portfolios eficientes para o período de jul/1999 a jun/2000. Espaços em branco denotam investimento nulo.

	out/00	nov/00	dez/00	jan/01	fev/01	mar/01	abr/01	mai/01	jun/01	jul/01	ago/01	set/01
AMBV3										0,16285	0,11028	0,18488
AMBV4								0,08101	0,06977			
BBDC3				0,07347					0,0467			
BRDT4										0,12314	0,20737	0,04747
CBEE3	0,1567											
CESP4		0,00091	0,05326	0,0515	0,10434	0,10731	0,12942					
CGAS4			0,03965									
CNFB4												0,37036
CPNE5				0,15277								
CPSL3				0,16701	0,07713	0,06523	0,00404					
CRUZ3		0,11165										
CSNA3								0,02734				
CSTB4									0,01859			
EMBR4	0,17267	0,14418	0,1728	0,19399	0,18011	0,1331	0,2242		0,04247	0,05511	0,02427	
GETI4	0,10612	0,11974			0,21436	0,33725	0,35496	0,09513	0,16682	0,05772		0,0933
GRSU3								0,3673	0,26223	0,30835	0,31994	0,14262
ITAU3					0,24973	0,09895	0,16664	0,2439	0,26451	0,25509	0,32231	0,07218
KLAB4	0,12674	0,24659	0,29391									
LIGHT3	0,14427											
PCAR4				0,06465								
PRGA4												0,08919
PTIP4	0,04571											
TCOC3	0,23266	0,29405	0,35836	0,2554	0,16064	0,25815	0,12074					
TERJ4			0,08202									
TMGR6								0,18532	0,12892	0,03775	0,01583	
TSPP3					0,01371							
USIM5	0,01515	0,08288										
VALE3				0,04121								

Tabela 2 – Composição dos portfolios eficientes para o período de out/2000 a set/2001. Espaços em branco denotam investimento nulo.

	IBVSP	CARTEIRA	CDI
jul/99	-10,193%	-8,988%	1,660%
ago/99	1,178%	9,925%	1,624%
set/99	5,131%	8,419%	1,399%
out/99	5,348%	0,839%	1,173%
nov/99	17,761%	18,208%	1,304%
dez/99	24,046%	25,773%	1,580%
jan/00	-4,113%	-1,396%	1,371%
fev/00	7,762%	-1,465%	1,440%
mar/00	0,906%	3,284%	1,440%
abr/00	-12,811%	-11,507%	1,293%
mai/00	-3,739%	-3,773%	1,486%
jun/00	11,841%	14,262%	1,387%
ACUM.	43,876%	58,777%	18,573%

RET. MEDIO	3,593%	4,465%	1,430%
PR. MEDIO	2,163%	3,035%	0,000%
RISCO	10,397%	10,681%	0,000%
BETA	1,000000	0,8975341	
SHARPE	0,208044	0,2841785	
TREYNOR	2,163%	3,382%	
RAP	3,593%	4,259%	

Tabela 3 – Comparação dos retornos entre jul/99 e jun/00

	IBVSP	CARTEIRA	CDI
out/00	-6,661%	-6,309%	1,280%
nov/00	-10,628%	-3,606%	1,216%
dez/00	14,842%	8,617%	1,135%
jan/01	15,814%	5,572%	1,203%
fev/01	-10,078%	-3,417%	1,009%
mar/01	-9,144%	1,719%	1,248%
abr/01	3,318%	-1,971%	1,179%
mai/01	-1,797%	-3,803%	1,271%
jun/01	-0,614%	22,386%	1,269%
jul/01	-5,529%	-1,843%	1,431%
ago/01	-6,645%	-6,291%	1,600%
set/01	-17,173%	-20,739%	1,323%
ACUM.	-33,231%	-14,393%	16,262%

RET. MEDIO	-2,858%	-0,807%	1,264%
PR. MEDIO	-4,122%	-2,071%	0,000%
RISCO	9,608%	9,856%	0,000%
BETA	1,00000	0,59240	
SHARPE	-0,42898	-0,21011	
TREYNOR	-4,122%	-3,495%	
RAP	-2,858%	-2,124%	

Tabela 4 – Comparação dos retornos entre out/00 e set/01

2.6. Limitações do Modelo Quadrático

A aproximação quadrática da expansão da função utilidade em série de potências torna o modelo mais fácil de ser aplicado, contudo é mais limitada, pois não está considerando momentos estatísticos de ordem mais alta, como a assimetria e a curtose. Isto pode ser suportado pela hipótese de que os retornos do mercado sejam i.i.d., o que por conseqüência do teorema do limite central, geraria uma distribuição normal para os retornos de um ativo com risco. Uma vez que os retornos de ativos com risco possuem distribuição normal, sua assimetria é nula e seu excesso de curtose também, o que torna inútil o estudo de momentos estatísticos de ordem mais alta.

Contudo é um fato bem conhecido que a distribuição dos retornos de um ativo com risco não segue de fato uma distribuição normal, de forma que para alguns casos desprezar estes momentos de ordem superior não dá uma boa aproximação para a utilidade. Um exemplo pode ser formulado da seguinte maneira: Após estudos de mercado, conclui-se que o retorno esperado de um ativo é de 10% e o seu risco é de 3,5%. Isto significaria dizer que, assumindo normalidade nos retornos, em aproximadamente 67% dos casos o retorno deste ativo estaria entre 6,5% e 13,5%.

Todavia se esta distribuição não for normal, possuindo um determinado grau de assimetria, na verdade o intervalo de confiança utilizado na inferência anterior não significaria mais 67% dos casos. Em particular, se a assimetria for positiva, um intervalo de confiança que comece a partir do ponto 6,5% e inclua os mesmos 67% dos casos conterá valores maiores que 13,5% sendo, por exemplo, o intervalo entre 6,5% e 14,5% como ilustrado na Figura 4. Mais catastrófico será caso a assimetria não seja levada em conta mas ela exista e seja negativa. Nesta situação, o hipotético intervalo de 67% dos casos a partir de 6,5% poderia estar entre 6,5% e 12%, como na figura 5, o que faz as nossas previsões que pareciam ser lógicas na verdade serem otimistas demais. Quanto maior for, em módulo o valor do coeficiente de assimetria da distribuição de retornos, mais fraco será o conceito de variância e covariância como medidas de risco de um investimento. Intuitivamente, concluímos que uma boa aproximação da função utilidade deve levar em conta a assimetria e tentar maximiza-la. Além disso, há estudos que afirmam que mesmo os ativos possuam distribuição normal, estratégias dinâmicas de compra e venda podem gerar distribuições significativamente assimétricas.

Neste trabalho apenas falamos de ativos fundamentais, mas pode-se desejar incluir derivativos no meio dos ativos com risco com os quais desejamos trabalhar. Neste ponto, é bem conhecido que derivativos seguem uma distribuição de retornos altamente assimétrica, uma vez que o preço de um derivativo no dia do vencimento é explicado pela combinação entre uma função constante igual a zero para valores abaixo de um ponto e linear a partir dos valores acima deste ponto. Assim, o modelo quadrático torna-se inviável para a inclusão de derivativos no modelo de otimização de portfolios.

Além disso, o modelo de otimização proposto acima fornece uma solução para somente um período, sem levar em consideração utilidades esperadas para períodos posteriores. Atualmente também são tema de outras pesquisas algoritmos de programação estocástica que considerem a função objetivo do problema a ser resolvido não mais como uma função de um só período, mas sim uma função cujas variáveis são determinadas por processos estocásticos e deseja se maximizar a utilidade para o período seguinte somada com a utilidade esperada para os diversos outros períodos. Esta utilidade esperada poderia ser estimada por meio de uma árvore que descreva os cenários possíveis de ocorrerem posteriormente, contendo também a probabilidade desta ocorrência. Estudos mais avançados em programação estocástica fogem do escopo deste trabalho.

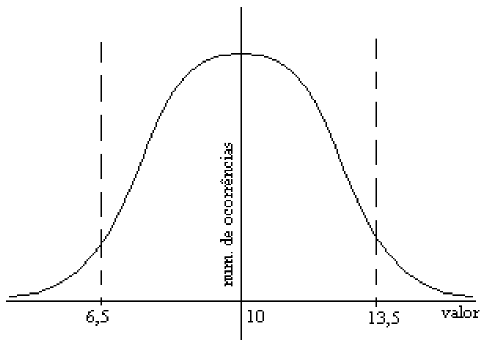


Fig. 3 – Distribuição normal com média 10 e desvio padrão 3,5.

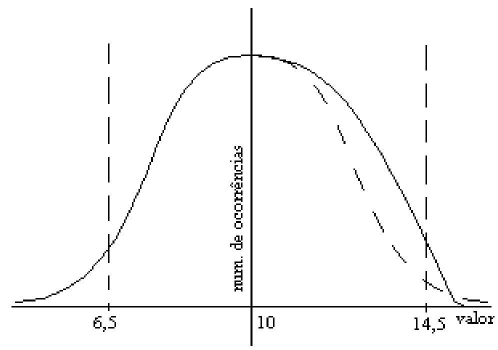


Fig. 4 – Distribuição com assimetria positiva, média 10 e desvio padrão 3,5. Em linha pontilhada uma distribuição normal de mesma média e desvio padrão.

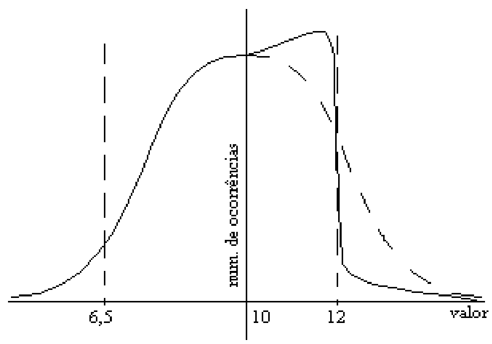


Fig. 5 – Distribuição com assimetria negativa, média 10 e desvio padrão 3,5. Em linha pontilhada uma distribuição normal de mesma média e desvio padrão.

Uma outra limitação do modelo estudado até agora é que restrições lineares têm menos poder do que restrições não lineares. Modelos não lineares são mais gerais e permitir restrições sobre fatores não lineares poderia enriquecer ainda mais o modelo e deixa-lo mais próximo da realidade.

Por fim, há estudos que negam por completo a hipótese de que o mercado é normal ou mesmo próximo disso e partem para estudos de modelos dinâmicos não lineares com memória longa e valores extremos. Mandelbrot propôs em [12] uma forma de analisar a série de retornos como uma distribuição fractal, de modo que a visão de risco por meio de uma matriz de covariâncias é totalmente contrariada. Tonis Vaga propôs em [11] a Hipótese do Mercado Coerente, onde a distribuição probabilística dos retornos muda dinamicamente com o tempo baseada em uma função que também foi utilizada por Ising para modelar o ferromagnetismo. Estas são visões do mercado totalmente diferentes das usuais, mas não menos promissoras.

Capítulo 3 – Assimetria de Portfolios

3.1. Formulação do Modelo

Recapitulando, um investidor deseja maximizar o valor esperado de uma função utilidade $U(R)$, onde R é o retorno esperado do portfolio. Os resultados obtidos até agora são baseados na expansão da série de Taylor desta função até a sua segunda derivada, o que gera para função objetivo, ao usarmos o operador Esperança, algo em função dos dois primeiros momentos centrais da variável aleatória em questão, que é o retorno do portfolio.

Agora, vamos estender os resultados obtidos, incluindo na função objetivo o terceiro momento central, que é a assimetria do retorno do portfolio em relação ao seu primeiro momento.

Para um portfolio formado por n ativos com risco, os três primeiros momentos do retorno do portfolio (R_p) são dados por:

$$\overline{R}_p = E[R_p] = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{R}_i$$

$$\sigma_p^2 = E\left[\left(R_p - \overline{R}_p\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$m_p^3 = E\left[\left(R_p - \overline{R}_p\right)^3\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i x_j x_k m_{ijk}$$

com $\overline{R}_i$ = retorno esperado do ativo i

σ_{ij} = covariância entre os retornos de i e j (para $i = j$ é a variância dos retornos)

m_{ijk} = co-assimetria entre os retornos de i, j e k, definida como o terceiro momento central não normalizado.

Assim, para um investidor averso ao risco, a utilidade esperada de um portfolio será:

$$E\left[U(R_p)\right] \cong E\left[U(\overline{R}_p)\right] + \frac{U''(\overline{R}_p)E\left[(R_p - \overline{R}_p)^2\right]}{2!} + \frac{U'''(\overline{R}_p)E\left[(R_p - \overline{R}_p)^3\right]}{3!} \cong$$

$$\cong U(R_p) + \frac{U''(\overline{R}_p)\sigma_p^2}{2} + \frac{U'''(\overline{R}_p)m_p^3}{6}$$

Desta forma, maximizar a utilidade esperada para um investidor averso ao risco é resolver:

3.1.1

$$\begin{aligned} &\min \quad \lambda x' r - x' Cov.x + \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_i x_j x_k m_{ijk} \\ &s.a. \quad x \in \Im, \Im = \{x \mid Ax \le b, l \le x \le u\} \end{aligned}$$

onde α é um parâmetro para o segundo grau de liberdade deste novo problema, a preferência por assimetria do investidor.

Observe que variando simultaneamente os parâmetros λ e α, iremos obter uma superfície eficiente no espaço tridimensional *risco* x *retorno* x *assimetria*.

3.2. Conclusões e Extensões para Pesquisas Futuras

Vimos no capítulo anterior uma descrição do modelo quadrático proposto por Markowitz. Este modelo apresentou uma boa performance com relação ao mercado. Todavia vimos que uma aproximação quadrática só é boa quando o mercado segue normalidade. Há evidências de que o mercado segue um movimento dinâmico, sendo normal durante alguns períodos e não o sendo em outros. Desta forma, propomos um novo modelo onde o terceiro momento é introduzido, e a preferência do investidor por assimetria é levada em conta.

Para este novo modelo surgem novas dúvidas:

- Qual é o método mais eficiente para resolvê-lo? Seria o método do gradiente?
- Metodologia para obtenção da superfície eficiente: é realmente necessário resolver para todos os parâmetros ou é possível modelar as condições de otimalidade deste problema para um novo problema linear ou quadrático paramétrico, e obter valores críticos do parâmetro e portanto toda a superfície?
- Embora o problema possua dois graus de liberdade, existe alguma relação entre eles? É possível modelar o problema usando um só parâmetro?

Estas e outras dúvidas que provavelmente surgirão são um campo para pesquisas muito vasto e ainda pouco explorado. Esclarece-las é uma tarefa difícil, todavia, uma vez executada, gerará um grande acréscimo à teoria atual, principalmente no tocante a portfolios eficientes incluindo opções, uma vez que o atual modelo quadrático não dá suporte algum para este caso.

Além disso, um grande campo de pesquisa está aberto para aplicações de modelos altamente não lineares no mercado financeiro, como Fractais, Teoria do Caos e Teoria de Valores Extremos.

Muito trabalho ainda está para ser feito.

Referências Bibliográficas

[1] E. J. Elton & M. J. Gruber. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. John Wiley & Sons Inc, 1991

[2] P. Wolfe. “The Simplex Method for Quadratic Programming.” *Econometrica* ***27*** (1959), pp.382-398

[3] B. Martos. *Nonlinear Programming Theory and Methods*. North-Holland Publishing Company, 1975

[4] C. Dunder. *Portfolios Eficientes Incluindo Opções*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo, 1998

[5] M. Friedman & L. J. Savage. “The Utility Analysis of Choices Involving Risk.” *Journal of Political Economy* (August/1948), pp.279-304

[6] H. Levy & H. M. Markowitz. “Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance.” *The American Economic Review* **69** (June/1979)

[7] J. M. Stern, C. A. B. Pereira, C. O. Ribeiro, C. Dunder, F. Nakano & M. Lauretto. *Otimização e Processos Estocásticos Aplicados à Economia e Finanças*. IME-USP

[8] R. Dorfman, P. Samuelson & R. Solow. *Linear Programming & Economic Analysis*. McGraw-Hill, 1958

[9] W. F. Sharpe. “Asset Allocation: Management Style & Performance Measurement” *The Journal of Portfolio Management* (Winter 1992), pp. 7-19

[10] J. Aldrian. *Portfolio Performance Evaluation*. Dissertação de Mestrado, Institut für Betriebswirtschaftslehre - Universität Wien, 2000

[11] T. Vaga. "The Coherent Market Hypotesis", *Financial Analysts Journal*, Dec/Jan 1991

[12] B. B. Mandelbrot. *Fractals and Scaling in Finance*, 1997